ΛΗΜΜΑ: Έστω C^1 συναρτήσεις $f,g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^2(t)+g^2(t)=1$ για κάθε $t \in I$. Τότε, για κάθε $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, υπάρχει C^1 συνάρτηση $\varphi : I \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(t)=\cos\varphi(t)$ και $g(t)=\sin\varphi(t)$, $\varphi(t_0)=t_0$ όπου $t_0 \in I$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρώ $\varphi(t)=\varphi_0+\int_{t_0}^{t}(fg'-f'g)\,dt$

$$(f(t)-\cos\varphi(t))^2+(g(t)-\sin\varphi(t))^2=2(1-f(t)\cos\varphi(t)-g(t)\sin\varphi(t))$$

Παίρνω την παράγωγο αυτής της ποσότητας, θα βγει ότι είναι σταθερή

Έστω ότι η C είναι C^2, τότε οι $\mathring{x}(t)$ & $\mathring{y}(t)$ είναι C^1 και πληρούν το ΛΗΜΜ, δηλ. υπάρχει $\varphi: I \to \mathbb{R}$ C^1 ώστε: $\mathring{x}(s) = \cos\varphi(s)$ και $\mathring{y}(s) = \sin\varphi(s)$

Παράδειγμα: Για την καμπύλη $c(s) = P_0 + s \cdot u$, $\|u\| = 1$ και $\frac{dc}{ds} = u \Rightarrow \left\|\frac{dc}{ds}\right\| = 1 \Rightarrow$ Η s μήκος τόξου για τη c

$$\mathring{c}(s) = u = (u_1, u_2) = (\cos\varphi, \sin\varphi) \text{ με } \varphi: I \to \mathbb{R} \text{ σταθερά}$$

$$k(s) = \frac{d\varphi}{ds}(s) = 0 \Rightarrow k = 0$$

Παράδειγμα: Έστω η παραμέτριση $c(s) = \left(r \cdot \cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$ για $s \in \mathbb{R}$. Τότε $\frac{dc}{ds}(s) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right) \Rightarrow \left\|\frac{dc}{ds}\right\| = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow s$: μήκος τόξου της c.

Έτσι, $\mathring{c}(s) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right) = \left(\cos\left(\frac{s}{r} + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{s}{r} + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

Μία γωνιακή συνάρτηση είναι η $\varphi(s) = \frac{s}{r} + \frac{\pi}{2}$

(Άρα, βρήθηκαν έμμεσα και οι άλλες γιατί διαφέρουν κατά ακέραιο πολ/σιο μεταξύ τους) Καθώς $k(s) = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r}$

Έστω $\tilde{\varphi}: I \to \mathbb{R}$ με
$$\left.\begin{aligned} \mathring{x}(s) &= \cos\tilde{\varphi}(s) = \cos\varphi(s) \\ \mathring{y}(s) &= \sin\tilde{\varphi}(s) = \sin\varphi(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi}(s) = \varphi(s) + 2\pi \cdot \lambda(s), \ \lambda(s) \in \mathbb{Z}$$

ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΑΛΛΟΥ ΤΡΟΠΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ:

$$\mathring{x} = \cos\varphi \text{ και } \mathring{y} = \sin\varphi \begin{cases} \Rightarrow \mathring{\mathring{x}} = -\mathring{\varphi}\sin\varphi \Rightarrow \mathring{\mathring{x}} = -k\mathring{y} & \Big| \cdot(-\mathring{y}) \\ \Rightarrow \mathring{\mathring{y}} = \mathring{\varphi}\cos\varphi \Rightarrow \mathring{\mathring{y}} = k\mathring{x} & \Big| \cdot(\mathring{x}) \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη

$$\mathring{x}\mathring{\mathring{y}} - \mathring{\mathring{x}}\mathring{y} = k\mathring{y}^2 + k\mathring{x}^2 = k\underbrace{(\mathring{x}^2 + \mathring{y}^2)}_{=1}$$

Συμπέρασμα:

Η καμπυλότητα της $c(s) = (x(s), y(s))$ που είναι C^2 είναι ίση $k = \mathring{x}\mathring{\mathring{y}} - \mathring{\mathring{x}}\mathring{y}$ (Άλλος τρόπος ορισμού καμπυλότητας)

Είχαμε δει ότι: $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $R_\theta \sim \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^2$, $Isom(\mathbb{R}^2)$

$\forall\, T \in Isom(\mathbb{R}^2)$ έχουμε

$T = T_v \circ R_\theta$

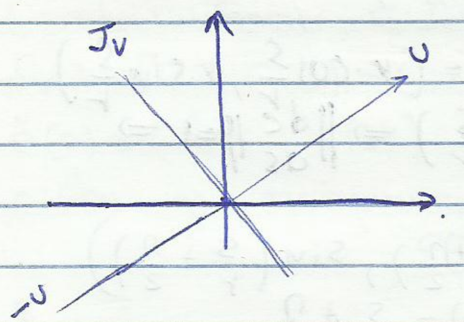
ή

$T = T_v \circ K_\theta$

Στροφή κατά γωνία $\pi/2$

Ο ορθογώνιος μετασχηματισμός $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $J = R_{\pi/2}$ καλείται μιγαδική δομή του $\mathbb{R}^2$. $J^2 = -Id$

$J(v_1, v_2) = -(v_2, v_1)$



Άρα, $J\dot{c} = (-\dot{y}, \dot{x})$

Συμπέρασμα:

$k = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle$.

ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΣ ΙΣΟΤΙΜΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ:

Έστω $c, \tilde{c} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ γεωμετρικά ισότιμες καμπύλες δηλαδή $\tilde{c} = T \circ c$, $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$ όπου $T = T_v \circ R_\theta$ ή $T = T_v \circ K_\theta$ και $T = T_v \circ T_*$, T_*: γραμμικό μέρος της T

$\tilde{c}' = T_* c'$ $\quad \tilde{c}'' = T_* c''$

$\|\tilde{c}'\| = \|T_* c'\| = \|c'\|$ (1)

Εφ' ότι η c έχει φυσική παράμετρο s

δηλ. $\|c'\| = 1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \|\tilde{c}'\| = 1 \Rightarrow s$ μήκος τόξου και για την $\tilde{c}$

$\dot{\tilde{c}} = T_* \dot{c}$ και $\ddot{\tilde{c}} = T_* \ddot{c}$

Οι καμπυλότητες των $c, \tilde{c}$ είναι αντίστοιχα

$k = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle$ και $\tilde{k} = \langle \ddot{\tilde{c}}, J\dot{\tilde{c}} \rangle$

$\tilde{k} = \langle \ddot{\tilde{c}}, J\dot{\tilde{c}} \rangle = \langle T_* \ddot{c}, J(T_* \dot{c}) \rangle = \langle T_* \ddot{c}, J \circ T_* (\dot{c}) \rangle$ (2)

Είπαμε, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ και άρα $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Έστω $T_* = R_\theta$

$J \circ T_* = R_{\pi/2} \circ R_\theta = R_{\pi/2+\theta} = R_{\theta+\pi/2} = R_\theta \circ R_{\pi/2} = T_* \circ J$

(I) Αν $T_* =$ στροφή $\Rightarrow J \circ T_* = T_* \circ J$

(2): Άρα, $\tilde{k} = \langle T_* \ddot{c}, T_*(J\dot{c}) \rangle = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle \Rightarrow \tilde{k} = k$

(II) Αν $T_* = k_\theta =$ κατοπτρισμός $\Rightarrow J \circ T_* = -T_* \circ J$

(2): Άρα, $\tilde{k} = -\langle T_* \ddot{c}, T_*(J\dot{c}) \rangle = -\langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle \Rightarrow \tilde{k} = -k$.

Έστω λεία καμπύλη $c: I \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου $\|\dot{c}\| = 1$. Θεωρούμε την αναπαραμέτρηση όπου $f(s) = -s = \bar{s}$.

$$\frac{dc}{d\bar{s}} = \frac{ds}{d\bar{s}} \frac{dc}{ds} = -\frac{dc}{ds} \Rightarrow \left\| \frac{dc}{d\bar{s}} \right\| = 1$$

$$\bar{k} = \frac{d\varphi}{d\bar{s}} = \frac{ds}{d\bar{s}} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{d\varphi}{ds} = -k = -\frac{d\varphi}{ds}.$$

Καμπυλότητα καμπυλών σε τυχαία παράμετρο

Έστω $c: I \to \mathbb{R}^2$ c^2 κανονική με παράμετρο t $c(t) = (x(t), y(t))$. Θεωρώ την αναπαραμέτρηση $\bar{c} = c \circ f$ της c με το μήκος τόξου, δηλαδή:

$S = S(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'\| dx \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \|c'\| > 0 \overset{\text{αντιστρ.}}{\Rightarrow} t = f(s) = t(s)$ και

$$\frac{d\bar{c}}{ds} = \frac{c'}{\|c'\|}$$

Ορισμός: Αν $\bar{k}$ είναι η καμπυλότητα της $\bar{c}$ (ως καμπύλη με φυσική παράμετρο) τότε η καμπυλότητα της c ορίζεται η συνάρτηση:

$k: I \to \mathbb{R}$ όπου $k(t) = \bar{k}(s(t))$

Υπολογισμός $k = <\overset{\circ\circ}{c}, J\overset{\circ}{c}>$

$$\overset{\circ}{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds}\cdot\frac{dc}{dt} \Rightarrow \overset{\circ}{c} = \frac{dt}{ds}\cdot c'$$

$$\overset{\circ\circ}{c} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}c'\right) = \frac{d^2t}{ds^2}c' + \frac{dt}{ds}\cdot\frac{d}{ds}(c') = \frac{d^2t}{ds^2}c' + \frac{dt}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\cdot\frac{dc'}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow \overset{\circ\circ}{c} = \frac{d^2t}{ds^2}c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\cdot c''.$$

$$k = <\frac{d^2t}{ds^2}c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c'', J\left(\frac{dt}{ds}c'\right)> =$$

$$= \frac{dt}{ds}\left\{\frac{d^2t}{ds^2}<c', Jc'> + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 <c'', Jc'>\right\}$$

$$k = \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 <c'', Jc'>, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{\|c'\|}$$

Συμπέρασμα:
Η καμπυλότητα C^2 κανονικής καμπύλης με παράμετρο t είναι η συνάρτηση:

$$k = \frac{<c'', Jc'>}{\|c'\|^3}$$

όπου $c(t) = (x(t), y(t))$, $c'(t) = (x'(t), y'(t))$, $c''(t) = (x''(t), y''(t))$
και $Jc'(t) = J(x'(t), y'(t)) = (-y'(t), x'(t))$

$$k = \frac{x'y'' - x''y}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$$

Παράδειγμα:
$c(t) = (a\cdot\cos t, b\sin t)$, $a, b > 0$
$x'(t) = -a\sin t$, $y'(t) = b\cos t$
$x''(t) = -a\cos t$, $y''(t) = -b\sin t$

Και άρα η καμπυλότητα της έλλειψης:

$$K(t) = \frac{a \cdot b \cdot \sin^2 t + ab\cos^2 t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}^{\,3}} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}^{\,3}}$$

Καμπύλες Γραφήματα:

$f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $c(t) = (t, f(t))$

$c'(t) = (1, f'(t)) \Rightarrow c''(t) = (0, f''(t))$

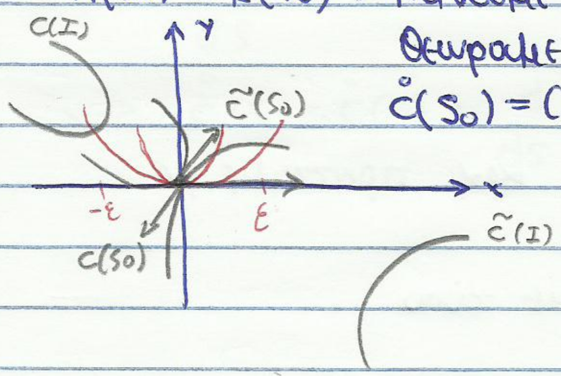
Άρα,

$$K = \frac{f''}{\sqrt{1+(f')^2}^{\,3}}$$

Δύο καμπύλες

Έστω $c, \tilde{c}: I \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου

$k(s_0) > \tilde{k}(s_0)$. Κάνουμε παράλληλη μετατόπιση των καμπυλών



Θεωρούμε τότε $c(s_0) = (0,0) = \tilde{c}(s_0)$ και $\dot{c}(s_0) = (1,0) = \dot{\tilde{c}}(s_0)$. Κοντά στο $(0,0)$ οι καμπύλες είναι γραφήματα συναρτήσεων $f, \tilde{f}$ ώστε $f, \tilde{f}: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0 = \tilde{f}(0)$ και $f'(0) = 0 = \tilde{f}'(0)$. Άρα το 0 κρίσιμο σημείο.

Και η καμπυλότητα στο 0 είναι ίση με:

$$K(0) = \frac{f''(0)}{\sqrt{1+f'(0)^2}^{\,3}} = f''(0)$$

όμως $\tilde{k}(0) = \tilde{f}''(0)$ άρα $k(0) > \tilde{k}(0) \Leftrightarrow f''(0) > \tilde{f}''(0)$

Επομένως, θεωρώντας $g = f - \tilde{f}$ και έχουμε $g(0) = 0$ και $g'(0) = 0$ αλλά $g''(0) > 0$ άρα προκύπτει ότι η g έχει γ.τ. ελαχ. στο σημείο 0. Δηλ. $\forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ $g(x) > g(0) = 0$

$\Rightarrow f(x) > \tilde{f}(x)$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^n$:

Υπαρξη: Για καθε συνεχή συνάρτηση $k(s)$, $s \in I$ υπάρχει καμπύλη $c: I \to \mathbb{R}^2$, με παράμετρο s το μήκος τόξου, της οποίας η καμπύλότητα είναι η δοθείσα συνάρτηση k

Μοναδικότητα: Αν $c, \tilde{c}: I \to \mathbb{R}^2$ είναι καμπύλες με καμπυλότητα $k = \tilde{k}$, τότε υπάρχει $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$ η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό ώστε $\tilde{c} = T \circ c$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Διαδικασία εύρεσης Καμπυλότητας

$c(s) = (x(s), y(s)) \Rightarrow \mathring{c}(s) = (\mathring{x}(s), \mathring{y}(s))$

$\mathring{x}(s) = \cos\varphi(s)$

$\mathring{y}(s) = \sin\varphi(s)$

Αρα, $k(s) = \dfrac{d\varphi}{ds}(s)$

Στην ύπαρξη μας δίνεται το $k(s)$ άρα πράττουμε με την αντίστροφη διαδικασία

Ορίζουμε C' συνάρτηση $\varphi: I \to \mathbb{R}$ με τύπο

$\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} k(\sigma)\, d\sigma$ και τις συναρτήσεις

$$\left.\begin{aligned} x(s) &= \int_{s_0}^{s} \cos\varphi(\sigma)\, d\sigma \\ y(s) &= \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(\sigma)\, d\sigma \end{aligned}\right\} c(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\varphi(\sigma)\, d\sigma, \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(\sigma)\, d\sigma \right)$$

Εχει διανυσμα ταχυτητας $\dfrac{dc}{ds}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\| \dfrac{dc}{ds} \right\| = 1 \Rightarrow s$: μήκος για την $c(s)$ με γωνιακή συνάρτηση

$\varphi(s)$ και επομένως καμπυλότητα: $k(s) = \dfrac{d\varphi}{ds}(s)$

Για τη Μοναδικότητα:

$c, \tilde{c} : I \to \mathbb{R}^2$. Θεωρώ ισομετρία $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$ κατάλληλη $\bar{c} = T \circ \tilde{c}$ με $T = T_v \circ A \circ T_w$ και A στροφή ώστε $A\dot{\tilde{c}}(s_0) = \dot{c}(s_0)$.

$$\bar{c}(s_0) = T_v(A(T_w(\tilde{c}(s_0)))) = T_v(A(0,0)) = T_v(0,0) = v = c(s_0)$$

άρα $\bar{c}(s_0) = c(s_0)$.

$$T_w(p) = w + p = -\tilde{c}(s_0) \Rightarrow T_w(\tilde{c}(s_0)) = (0,0)$$

$$\frac{d\bar{c}}{ds} = A * \frac{d\tilde{c}}{ds} \Rightarrow \dot{\bar{c}}(s_0) = A\dot{\tilde{c}}(s_0) = \dot{c}(s_0) \Longrightarrow \boxed{\dot{\bar{c}}(s_0) = \dot{c}(s_0)}$$

έχουμε τα διανύσματα ταχύτητας

$$\dot{c}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$$
$$\dot{\bar{c}}(s) = (\cos\bar{\varphi}(s), \sin\bar{\varphi}(s))$$

Μπορούμε να υποθέσουμε: $\varphi(s_0) = \bar{\varphi}(s_0)$

$k = \frac{d\varphi}{ds}$ και άρα $\bar{k} = \tilde{k} = \frac{d\bar{\varphi}}{ds} \Rightarrow \frac{d}{ds}(\varphi - \bar{\varphi}) = 0$ $\Rightarrow \varphi(s) = \bar{\varphi}(s)\ \forall s$

$$\Rightarrow \dot{\bar{c}}(s) = \dot{c}(s) \Rightarrow \frac{d}{ds}(c - \bar{c}) = 0 \xRightarrow{c(s_0) = \bar{c}(s_0)} c = \bar{c} \Rightarrow c = T \circ \tilde{c} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \tilde{c} = T^{-1} \circ c$$